11 Funkcije

71. **(2. kolokvij, januar 2022.)** Funkcijo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiramo s predpisom

$$f(x) = x^2.$$

Obravnavajte injektivnost, surjektivnost in bijektivnost funkcije f.

72. Naj bo $\mathbb{R}$ množica realnih števil in naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana funkcija, definirana s predpisom

$$f(x) = 5x + 12.$$

Obravnavajte injektivnost, surjektivnost in določite $f^{-1}(x)$.

73. Imamo naslednjo relacijo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 = \sqrt{x}\}.$$

Določiti, ali je podana relacija funkcija na $\mathbb{R}$. (Odgovor podrobno razložite.)

74. Naj bo $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Imamo naslednjo relacijo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} : y^2 = \sqrt{x}\}.$$

Določiti, ali je podana relacija funkcija iz $\mathbb{R}_0^+$ v $\mathbb{R}$. (Odgovor podrobno razložite.)

75. Naj bo $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Imamo naslednjo relacijo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y^2 = \sqrt{x}\}.$$

Določiti, ali je podana relacija funkcija na $\mathbb{R}_0^+$. (Odgovor podrobno razložite.)

76. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ in $b \neq 0$. Funkcijo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{a\}$ definiramo s predpisom

$$f(x) = a + \frac{b}{x}.$$

Obravnavajte injektivnost, surjektivnost in bijektivnost funkcije f.

77. Poiščite primer:

(a) Injektivne funkcije $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki ni surjektivna.

(b) Funkcije $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki je surjektivna, vendar ni injektivna.

78. Naj bo $\mathbb{N}$ množica naravnih števil in naj bo $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dana funkcija, definirana s predpisom

$$g(m, n) = 2^m \cdot 3^n.$$

Obravnavajte injektivnost, surjektivnost in določite g^{-1} (če sploh obstaja).

79. Naj bo $\mathbb{Z}$ množica celih števil in naj bo $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dana funkcija, definirana s predpisom

$$f(m, n) = m + n.$$

Obravnavajte injektivnost, surjektivnost in določite f^{-1} (če sploh obstaja).

80. Naj bo $f : A \to B$ funkcija, in naj bo $\mathrm{im}(f) := \{y \in B \mid (\exists x)((x, y) \in f)\}$. Dokažite naslenjo implikacijo:

- Če je f injektivna funkcija, potem je f^{-1} funkcija iz $\mathrm{im}(f)$ v A.

(V zgornji implikcaciji f^{-1} je inverzna relacija relacije f, tj. $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$.)

81. **(teoretična naloga)** Naj bo $f : A \to B$ funkcija. Če obstaja funkcija $g : B \to A$, za katero velja

$$f \circ g = \mathrm{id}_B \qquad \text{in} \qquad g \circ f = \mathrm{id}_A,$$

pokažite, da velja: f je bijektivna funkcija in $g = f^{-1}$.

82. **(teoretična naloga)** Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to A$ dani funkciji. Dokažite naslednji implikaciji.

- Če je $f \circ g = \mathrm{id}_B$, potem je $f \circ g$ surjektivna funkcija.
- Če je $f \circ g$ surjektivna funkcija, potem je tudi funkcija f surjektivna.

(V prvi zgornji implikaciji je id_B identična funkcija množice B, tj. $\mathrm{id}_B(b) = b$ za vse $b \in B$.)

Vse naloge so prenesene z naslednje spletne strani:
https://osebje.famnit.upr.si/~penjic/teaching.html.
NA ISTI STRANI LAHKO BRALEC NAJDE VSE REŠITVE PODANIH NALOG.